第 64 卷　第 5 期　中山大学学报（自然科学版中英文）　Vol. 64　No. 5
2025 年　9 月　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　Sept.　2025

DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. ZR20250123

参数集值优化问题解集的稳定性*

孟旭东

南昌航空大学科技学院,江西 共青城 332020

摘　要:在赋范线性空间中研究了参数集值优化问题解集的稳定性. 首先,给出了参数集值优化问题 mu-最小解映射和弱 mu-最小解映射的概念及其关系. 其次,运用分析方法讨论了参数集值优化问题 mu-最小解映射和弱 mu-最小解映射的上半连续性和解集的紧性. 最后,借助水平集值映射获得了参数集值优化问题 mu-最小解映射和弱 mu-最小解映射的下半连续性定理,并给出例子解释了所得结果的有效性.

关键词:集值优化问题;稳定性;半连续性;局部Lipschitz连续性

中图分类号:O221.3　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**2097 - 0137(2025)05 - 0154 - 09

Stability of solution sets for parametric set-valued optimization problems

MENG Xudong

Science College of Nanchang Hang Kong University, Gongqingcheng 332020, China

Abstract: The stability of solution sets for parametric set-valued optimization problems is studied in normed vector space. Firstly, the concepts about mu-minimal solution mapping and weak mu-minimal solution mapping for parametric set-valued optimization problems and their relations are given. Secondly, using analytical method, upper semicontinuity and compactness of mu-minimal solution mapping and weak mu-minimal solution mapping to parametric set-valued optimization problems are discussed. Finally, the lower semicontinuity theorems for mu-minimal solution mapping and weak mu-minimal solution mapping of parametric set-valued optimization problems are obtained by the level set-valued mapping. Some examples are given to explain effectiveness of the obtained results.

Key words: set-valued optimization; stability; semicontinuity; locally Lipschitz continuity

集值优化在数理金融、对策分析和工程技术等领域具有广泛应用,备受广大学者青睐,取得了一系列成果(Avriel et al., 1988;Pallaschke et al., 2002;Göpfert et al., 2003;Khan et al., 2015;Khushboo et al., 2019a;Zhang et al., 2021). 集值优化问题解集稳定性主要蕴含Painlevé-Kuratowski收敛性、连续性和适定性等. 基于集序关系的解集稳定性是运筹学研究的热点新课题. 目前,Kuroiwa(1997)与Jahn et al.(2011)首次引入了集合关于锥的上(下)序关系和弱上(下)序关系,分析了它们的关系. Anh et al.(2020)与Han et al.(2020,2022)研究了集值优化问题Painlevé-Kuratowski收敛性和Hausdorff收敛性最优条件. Crespi et al.(2018)与孟旭东(2022c,2024)在不同假设条件下建立了集优化问题点态适定性、全局适定性、扩展适定性、弱扩展适定性及广义适定性定理. 在Chicco et al.(2011)引进改进集概念基础上, Dhingra et al.(2017)将Kuroiwa

* 收稿日期:2025 - 07 - 08　　录用日期:2025 - 08 - 11　　网络首发日期:2025 - 09 - 17
基金项目:江西省自然科学基金(20232BAB201003);江西省教育厅科学技术重点研究项目(GJJ218701);
南昌航空大学科技学院重点科学技术研究项目(KYKJ2108);
市县联动科研攻关试点项目自然科学基金(2025_001116);
南昌航空大学科技学院自然科学基金(KYZK2301)
作者简介:孟旭东(1982年生),男;研究方向:向量优化理论; E-mail:mxudongm@163.com

(1997)与Jahn et al. (2011)中集序关系推广为具改进集的上(下)序关系和弱上(下)序关系. 在具改进集序关系下,Mao et al.(2019)、Peng et al.(2023)与孟旭东(2025)获得了集值优化问题最小解集和弱最小解集的Painlevé-Kuratowski收敛性及稳定性条件,孟旭东(2025)的结果推广了Anh et al.(2020)与Han et al.(2020, 2022)中结论.

参数集值优化问题稳定性研究是运筹学与控制论的崭新研究方向,旨在关注当目标映射和可行域发生微小变化时或目标模型和数据发生扰动时,所求解并没有因干扰而发生较大改变,更加贴近实际问题中的变化规律和自然特质,目前此类问题研究较少,对其探究可助力完善优化理论体系、促进统一不同优化概念和适时拓宽实际应用领域等. Xu et al.(2016)与Khoshkhabar-Amiranloo(2018)利用集序映射半连续性和水平映射连续性等技巧获得了参数集合优化问题解集映射稳定性最优条件. 孟旭东等(2019,2022a,2022b)借助标量化技术和水平映射概念,运用分析方法得到了参数集值优化问题及对偶问题的Lipschitz连续性和(弱)近似解集的上(下)半连续性条件. 孟旭东(2022d)通过分析方法构建了关于参数集值优化问题解集映射的Berge连续性、Hausdorff连续性、锥-Hausdorff连续性和紧闭性定理. Peng et al.(2025)在不具凸性假设条件下,给出了基于改进集的参数集优化问题最小解映射和弱最小解映射的Berge上连续性和Berge下半连续性的充分性条件.

最近,Karaman et al.(2018)借助Minkowski差介绍了集序关系,与Kuroiwa(1997)、Jahn et al. (2011)及Dhingra(2017)中的集序关系相比,这些集序关系是有界集族上的部分序关系,因此提供了一种研究集值优化问题的新方法. 基于Minkowski差的集序关系,Preechasilp et al.(2019)、Khushboo et al.(2019b)与Ansari et al.(2022)对集值优化问题解集稳定性进行了初步研究. 然而,基于Minkowski差的集序关系尚未对参数集值优化问题解集的稳定性进行研究. 因此,本文旨在利用Minkowski差的集合序关系深入讨论参数集值优化问题解集映射的连续性和紧性,且假设弱于Crespi et al.(2018)、Han et al.(2020)、Ansari et al.(2022) 与孟旭东(2022b,2024) 中相关结论的最优性条件.

1　预备知识

设$(X, \|\cdot\|_X)$、$(Y, \|\cdot\|_Y)$、$(\Omega, \|\cdot\|_\Omega)$均为赋范线性空间,$B_X$、$B_Y$分别为$X$、$Y$中的以原点为中心的闭单位球,$B_Y(y, r)$为$Y$中以点$y \in Y$为中心且以$r$为半径的开球. $K \subseteq Y$为Y中的闭凸点锥且$\mathrm{int}\,K \neq \varnothing$. $\Gamma(Y)$、$\Upsilon(Y)$分别表示Y的所有非空真子集和所有非空有界真子集的全体,记$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

设$A, B \in \Gamma(Y)$, 据Kuroiwa(1997)知A与B的u-上序关系"$\leqslant_K^u$"和弱u-上序关系"$\ll_K^u$"分别定义为

$$A \leqslant_K^u B \Leftrightarrow A \subseteq B - K \text{ 和 } A \ll_K^u B \Leftrightarrow A \subseteq B - \mathrm{int}\,K.$$

据Pallaschke et al.(2002)知A与B的Minkowski差定义为$A \dot{-} B := \{y \in Y: y + B \subseteq A\}$. 据Karaman et al.(2018)知$A$与$B$的$mu$-上序关系"$\leqslant_K^{mu}$"和弱$mu$-上序关系"$\ll_K^{mu}$"分别定义为

$$A \leqslant_K^{mu} B \Leftrightarrow (B \dot{-} A) \cap K \neq \varnothing \text{ 与 } A \ll_K^{mu} B \Leftrightarrow (B \dot{-} A) \cap \mathrm{int}\,K \neq \varnothing.$$

易见"$\leqslant_K^{mu}$"为$\Upsilon(Y)$上的偏序关系.

引理 1(Han, 2002)　设$A, B \subseteq Y$为非空子集,且B为凸集,如果对任何的点$\mu \in (0, \delta)$, 满足$A + \delta B_Y \subseteq B + \mu B_Y$, 有$A \subseteq \mathrm{int}\,B$.

引理 2　设$K \subseteq Y$为闭凸点锥,$\mathrm{int}\,K \neq \varnothing$,$A, B \in \Gamma(Y)$, 如果$A \ll_K^{mu} B$, 则$A \ll_K^u B$.

证明　据$A \ll_K^{mu} B$, 对任何的点$k \in \mathrm{int}\,K$, 有$k + A \subseteq B$, 故$A \subseteq -k + B \subseteq B - \mathrm{int}\,K$, 则$A \ll_K^u B$.

设$M \subseteq X$为非空子集,$F: X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$为非空集值映射,讨论集值优化问题(简称问题(SVOP)):

$$\min F(x), \text{s.t. } x \in M.$$

现回顾问题(SVOP)的u-最小解和弱u-最小解的概念.

定义 1(Jahn et al., 2011)　设$M \subseteq X$为非空子集,$F: X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$为非空集值映射,点$x_0 \in M$,

(i) 称点x_0为问题(SVOP)的u-最小解当且仅当对任何的点$x \in M$, 满足$F(x) \leqslant_K^u F(x_0)$, 有$F(x_0) \leqslant_K^u F(x)$;

(ii) 称点x_0为问题(SVOP)的弱u-最小解当且仅当对任何的点$x \in M$, 满足$F(x) \ll_K^u F(x_0)$, 有$F(x_0) \ll_K^u F(x)$.

注1 问题(SVOP)的所有u-最小解和弱u-最小解的全体分别记为$S_u(F,M)$和$W_u(F,M)$，易知，$S_u(F,M)\subseteq W_u(F,M)$.

证明 对任意点$x_0\in S_u(F,M)$，假若存在点$x\in M$，满足$F(x)\ll_K^u F(x_0)$，有$F(x)\subseteq F(x_0)-\operatorname{int}K\subseteq F(x_0)-K$，则$F(x)\leqslant_K^u F(x_0)$. 据点$x_0\in S_u(F,M)$，得$F(x_0)\leqslant_K^u F(x)$，所以$F(x_0)\subseteq F(x)-K\subseteq F(x_0)-\operatorname{int}K-K\subseteq F(x)-K-\operatorname{int}K-K\subseteq F(x)-\operatorname{int}K$，即$F(x_0)\ll_K^u F(x)$，故点$x_0\in W_u(F,M)$，因此$S_u(F,M)\subseteq W_u(F,M)$.

接下来给出问题(SVOP)的mu-最小解和弱mu-最小解的概念.

定义2(Khan et al., 2015) 设$M\subseteq X$为非空子集，$F:X\to 2^Y\backslash\{\varnothing\}$为非空有界集值映射，点$x_0\in M$，

(i) 称点x_0为问题(SVOP)的mu-最小解当且仅当不存在点$x\in M$，满足$F(x)\leqslant_K^{mu}F(x_0)$，$F(x)\neq F(x_0)$，即对任何的点$x\in M$，要么$F(x)\not\leqslant_K^{mu}F(x_0)$，要么$F(x)=F(x_0)$；

(ii) 称点x_0为问题(SVOP)的弱mu-最小解当且仅当不存在点$x\in M$，使得$F(x)\ll_K^{mu}F(x_0)$. 问题(SVOP)的所有mu-最小解和弱mu-最小解的全体分别记为$S_{mu}(F,M)$和$W_{mu}(F,M)$.

由注1和引理2可得

引理3 设$K\subseteq Y$为闭凸点锥且$\operatorname{int}K\neq\varnothing$，则$S_u(F,M)\subseteq W_u(F,M)\subseteq W_{mu}(F,M)$.

定义3(Avriel et al., 1988) 设$M\subseteq X$为非空子集，称M为弧连通的，如果对任何的点$x,y\in M$，存在连续函数$\varphi:[0,1]\to M$，使得$\varphi(0)=x,\varphi(1)=y$.

受Han(2022)定义2.5及Ansari et al.(1998)定义2.11的启发，给出集值映射严格mu-拟连通的概念.

定义4 设$M\subseteq X$为弧连通集，$F:X\to 2^Y\backslash\{\varnothing\}$为非空集值映射，称$F$在$M$上为严格$mu$-拟连通的，如果对任何的$A\in\Gamma(Y)$，任何的点$x,y\in M,x\neq y$，满足$F(x)\leqslant_K^{mu}A,F(y)\leqslant_K^{mu}A$，存在连续函数$\varphi:[0,1]\to M$，满足$\varphi(0)=x,\varphi(1)=y$，使得对任何的点$t\in(0,1)$，有$F(\varphi(t))\ll_K^{mu}A$.

现给出问题(SVOP)的mu-最小解和弱mu-最小解等价性结论.

引理4 设$M\subseteq X$为弧连通集，$F:X\to 2^Y\backslash\{\varnothing\}$为非空集值映射，$F$在$M$上为严格$mu$-拟连通的且具非空值，则$S_{mu}(F,M)=W_{mu}(F,M)$.

证明 据定义2知$S_{mu}(F,M)\subseteq W_{mu}(F,M)$. 下证$W_{mu}(F,M)\subseteq S_{mu}(F,M)$. 设点$x_1\in W_{mu}(F,M)$，$x_1\notin S_{mu}(F,M)$，则存在点$x_2\in X$，有$F(x_2)\leqslant_K^{mu}F(x_1),F(x_1)\neq F(x_2)$.

据$F(x_2)\leqslant_K^{mu}F(x_1)$及$F$在$M$上为严格$mu$-拟连通的，则存在连续函数$\varphi:[0,1]\to M$，满足$\varphi(0)=x_2,\varphi(1)=x_1$，使得对任何的$t\in(0,1)$，有$F(\varphi(t))\ll_K^{mu}F(x_1)$，但这与点$x_1\in W_{mu}(F,M)$矛盾，故点$x_1\in S_{mu}(F,M)$. 所以，$S_{mu}(F,M)=W_{mu}(F,M)$.

现指出集值映射半连续性、局部Lipschitz连续和弱局部K-Lipschitz连续的基本概念.

定义5(Göpfert et al., 2003；Khanet al., 2015) 设$F:X\to 2^Y\backslash\{\varnothing\}$为非空集值映射，点$x_0\in X$，

(i)称F在点x_0处为上半连续的当且仅当对任何开邻域$V\subseteq Y$，满足$F(x_0)\subseteq V$，存在点x_0的邻域$U(x_0)\subseteq X$，使得对任何的点$x\in U(x_0)$，有$F(x)\subseteq V$；

(ii)称F在点x_0处为下半连续的当且仅当对任何开邻域$V\subseteq Y$，满足$F(x_0)\cap V\neq\varnothing$，存在点$x_0$的邻域$U(x_0)\subseteq X$，使得对任何的点$x\in U(x_0)$，有$F(x)\cap V\neq\varnothing$；

(iii)称F在X上为上(下)半连续的当且仅当F在X上每点处为上(下)半连续的；

(iv)称F在X上为连续的当且仅当F在X上既上半连续又下半连续.

引理5(Göpfert et al., 2003；Khan et al., 2015) 设$F:X\to 2^Y\backslash\{\varnothing\}$为非空集值映射，点$x_0\in X$，

(i)F在点x_0处下半连续当且仅当对每个序列$\{x_n\}\subseteq X,x_n\to x_0$，点$y_0\in F(x_0)$，存在点$y_n\in F(x_n)$，使得$y_n\to y_0$；

(ii)$F(x_0)$为紧集，F在点x_0处上半连续当且仅当对每个序列$\{x_n\}\subseteq X,x_n\to x_0$，及点$y_n\in F(x_n)$，存在点$y_0\in F(x_0)$，$\{y_{n_k}\}\subseteq\{y_n\}$，使得$y_{n_k}\to y_0$.

定义6(孟旭东, 2022a；Ansari et al., 2022) 设$M\subseteq X$为非空子集，$F:X\to 2^Y\backslash\{\varnothing\}$为非空集值映射，点$x_0\in X$，

(i)称F在点x_0处为局部Lipschitz连续的当且仅当存在$L_1>0$，点x_0的邻域$U(x_0)\subseteq X$，使得对任何的点

$x_1, x_2 \in U(x_0) \cap M$, 有 $F(x_1) \subseteq F(x_2) + L_1 \| x_1 - x_2 \|_X B_Y$;

(ii)称 F 在点 x_0 处为弱局部 K-Lipschitz 连续的当且仅当存在 $L_2 > 0$, 点 x_0 的邻域 $U(x_0) \subseteq X$, 使得对任何的点 $x_1, x_2 \in U(x_0) \cap M, w \in F(x_2)$, 有 $F(x_1) \cap \left\{ w + L_2 \| x_1 - x_2 \|_X B_Y + K \right\} \neq \varnothing$;

(iii)称 F 在 M 上为局部 Lipschitz 连续的当且仅当 F 在 M 上每点处为局部 Lipschitz 连续的;

(iv)称 F 在 M 上为弱局部 K-Lipschitz 连续的当且仅当 F 在 M 上每点处为弱局部 K-Lipschitz 连续的.

注 2　(i)据孟旭东(2022a)中例 2.3 可知, F 在 M 上为连续的, 但 F 在 M 上不是局部 Lipschitz 连续的;

(ii)据 Ansari et al.(2022)中例 2.4 和例 2.5 知, F 在某点处是局部 Lipschitz 连续的, 但 F 在此点处不是下(上)半连续;

(iii)由(i)和(ii)知, 集值映射局部 Lipschitz 连续性与半连续性及连续性互不蕴含.

现给出本文研究的两个重要命题, 旨在为讨论后续解集稳定性作准备.

命题 1　设 $M \subseteq X$ 为非空子集, $F: M \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ 为非空集值映射, 点 $x_0, y_0 \in M$, F 在点 x_0, y_0 处为局部 Lipschitz 连续的且 $F(y_0)$ 为闭集, 序列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq M, x_n \to x_0, y_n \to y_0$, 当 n 充分大时, 有 $F(x_n) \leqslant_K^{mu} F(y_n)$, 则 $F(x_0) \leqslant_K^{mu} F(y_0)$.

证明　由 F 在点 x_0 处为局部 Lipschitz 连续的, 则存在 $L_1 > 0, N_1 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_1$ 时, 有

$$F(x_0) \subseteq F(x_n) + L_1 \| x_n - x_0 \|_X B_Y. \tag{1}$$

据 F 在点 y_0 处为局部 Lipschitz 连续的, 则存在 $L_2 > 0, N_2 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_2$ 时, 有

$$F(y_n) \subseteq F(y_0) + L_2 \| y_n - y_0 \|_X B_Y. \tag{2}$$

由当 n 充分大时, 有 $F(x_n) \leqslant_K^{mu} F(y_n)$, 则存在点 $k_n \in K, N_3 \in \mathbb{N}$, 当 $n > N_3$ 时, 有

$$k_n + F(x_n) \subseteq F(y_n). \tag{3}$$

结合式(1)~(3), 取 $N_0 = \max(N_1, N_2, N_3)$, 当 $n > N_0$ 时, 有

$$k_n + F(x_0) \subseteq F(y_0) + L_1 \| x_n - x_0 \|_X B_Y + L_2 \| y_n - y_0 \|_X B_Y. \tag{4}$$

则 $F(x_0) \leqslant_K^{mu} F(y_0)$, 即存在点 $k_0 \in K$, 使得 $k_0 + F(x_0) \subseteq F(y_0)$. 假若不然, 对任何的点 $k_0 \in K$, 存在点 $w_0 \in F(x_0)$, 有 $k_0 + w_0 \notin F(y_0)$. 据 $F(y_0)$ 为闭集, 则存在 $\delta_0 > 0$, 得

$$k_0 + w_0 \notin F(y_0) + \delta_0 B_Y. \tag{5}$$

据 $x_n \to x_0, y_n \to y_0$, 注意到 B_Y 为闭单位球, 并结合式(4), 存在 $N_4 \in \mathbb{N}$, 满足 $N_4 > N_0$, 当 $n > N_4$ 时, 有

$$k_n + F(x_0) \subseteq F(y_0) + \delta_0 B_Y. \tag{6}$$

这与式(5)矛盾, 故 $k_0 + F(x_0) \subseteq F(y_0)$, 所以 $F(x_0) \leqslant_K^{mu} F(y_0)$.

命题 2　设 $M \subseteq X$ 为非空子集, $F: M \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ 为非空集值映射, 点 $x_0, y_0 \in M$, F 在点 x_0 处为弱局部 K-Lipschitz 连续的, F 在点 y_0 处为局部 Lipschitz 连续的且 $F(y_0)$ 为紧集, 序列 $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq M, x_n \to x_0, y_n \to y_0$, 满足 $F(y_0) \ll_K^{mu} F(x_0)$, $F(x_n) \subseteq Y$ 为凸子集, 则当 n 充分大时, 有 $F(y_n) \ll_K^{mu} F(x_n)$.

证明　据 $F(y_0) \ll_K^{mu} F(x_0)$, 知存在点 $k_0 \in \operatorname{int} K$, 使得 $k_0 + F(y_0) \subseteq F(x_0)$, 则对任何的 $r > 0$, 有 $k_0 + F(y_0) \subseteq F(x_0) \subseteq \bigcup_{w \in F(x_0)} B_Y(w, r)$. 又 $F(y_0)$ 为紧集, 故存在有限集 $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\} \subseteq F(x_0)$, 使得

$$k_0 + F(y_0) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_Y(w_i, r). \tag{7}$$

再据 $k_0 + F(y_0)$ 为紧集, 则存在 $\delta_0 > 0$, 使得

$$k_0 + F(y_0) + 3\delta_0 B_Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_Y(w_i, r). \tag{8}$$

据 F 在点 x_0 处为弱局部 K-Lipschitz 连续的, 则存在点 x_0 的邻域 $U(x_0) \subseteq X$, 以及 $L_1 > 0$, 使得对任何的点 $x \in U(x_0), w \in F(x_0)$, 有

$$F(x) \cap \left\{ w + L_1 \| x_1 - x_2 \|_X B_Y + K \right\} \neq \varnothing. \tag{9}$$

再由 F 在点 y_0 处为局部 Lipschitz 连续, 则存在点 y_0 的邻域 $U(y_0) \subseteq X$, 以及 $L_2 > 0$, 使得对任何的点

$y \in U(y_0)$, 有

$$F(y) \subseteq F(y_0) + L_2\|y - y_0\|_X B_Y. \tag{10}$$

据$x_n \to x_0, y_n \to y_0$, 知存在$N_0 \in N$, 当$n > N_0$时,有点$x_n \in U(x_0), y_n \in U(y_0)$, 再结合式(10),有

$$2\delta_0 B_Y + F(y_n) \subseteq 2\delta_0 B_Y + F(y_0) + L_2\|y_n - y_0\|_X B_Y. \tag{11}$$

又由$y_n \to y_0$, 注意到B_Y为闭单位球,并据式(8)和式(11),得

$$k_0 + 2\delta_0 B_Y + F(y_n) \subseteq k_0 + F(y_0) + 3\delta_0 B_Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_Y(w_i, r) = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\} + B_Y(0, r). \tag{12}$$

对任何的点$w \in k_0 + 2\delta_0 B_Y + F(y_n)$, 结合式(12)知,存在$i_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$, 以及点$b_1 \in B_Y(0, r)$, 使得

$$w = w_{i_0} + b_1. \tag{13}$$

据式(9)知,对任何的点$x_n \in U(x_0), w \in F(x_0)$, 有$F(x_n) \cap \left\{w + L_1\|x_n - x_0\|_X B_Y + K\right\} \neq \varnothing$. 再注意到$x_n \to x_0$, B_Y为闭单位球,得$F(x_n) \cap \{w + \delta_0 B_Y + K\} \neq \varnothing$. 故存在点$w_n \in F(x_n)$, 以及点$b_2 \in B_Y, k_1 \in K$, 使得$w_n = w_{i_0} + b_2\delta_0 + k_1$, 故$w_{i_0} = w_n - b_2\delta_0 - k_1$, 结合式(13),有$w = w_n + b_1 - b_2\delta_0 - k_1$, 所以

$$k_1 + w = w_n - b_2\delta_0 + b_1 \in F(x_n) + \delta_0 B_Y + B_Y(0, r). \tag{14}$$

据点$w \in k_0 + 2\delta_0 B_Y + F(y_n)$, 知$k_1 + w \in k_1 + k_0 + 2\delta_0 B_Y + F(y_n)$, 结合式(14),有

$$k_1 + k_0 + 2\delta_0 B_Y + F(y_n) \subseteq F(x_n) + \delta_0 B_Y + B_Y(0, r) \subseteq F(x_n) + \delta_0 B_Y + rB_Y. \tag{15}$$

记$k_2 = k_1 + k_0$, 由点$k_0 \in \operatorname{int} K, k_1 \in K$, 知点$k_2 \in \operatorname{int} K$, 再据式(15),有

$$k_2 + 2\delta_0 B_Y + F(y_n) \subseteq F(x_n) + \delta_0 B_Y + rB_Y. \tag{16}$$

令$r \to 0^+$, 得$r + \delta_0 \to \delta_0 < 2\delta_0$, 又由引理1知,$k_2 + F(y_n) \subseteq \operatorname{int} F(x_n) \subseteq F(x_n)$, 故当$n$充分大时,有$F(y_n) \ll_K^{mu} F(x_n)$.

设$F: X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}, M: \Omega \to 2^X \backslash \{\varnothing\}$为非空集值映射,对任何的点$\mu \in \Omega$, 讨论参数集值优化问题(简称问题(PSVOP)):

$$\min F(x), \text{s.t. } x \in M(\mu).$$

问题(PSVOP)的mu-最小解映射$S_{mu}: \Omega \to 2^X \backslash \{\varnothing\}$和弱$mu$-最小解映射$W_{mu}: \Omega \to 2^X \backslash \{\varnothing\}$分别定义为$S_{mu}(\mu) = S_{mu}(M(\mu))$与$W_{mu}(\mu) = W_{mu}(M(\mu))$.

注3 对任何的点$\mu \in \Omega$, 有$S_{mu}(\mu) \subseteq W_{mu}(\mu)$.

定义7 设$F: X \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}, M: \Omega \to 2^X \backslash \{\varnothing\}$为非空集值映射,水平集值映射$L: \Omega \times X \to 2^X \backslash \{\varnothing\}$定义为

$$L(\mu, x) = \{y \in M(\mu): F(y) \leqslant_K^{mu} F(x)\}, \ \forall \mu \in \Omega, x \in M(\mu).$$

注4 对任何的点$\mu \in \Omega, x \in M(\mu)$, 有$S_{mu}(L(\mu, x)) \subseteq S_{mu}(\mu) = S_{mu}(M(\mu))$.

对任何的点$(\mu, x) \in \Omega \times X$, 现给出水平集值映射集$L(\mu, x)$闭性的最优性条件.

命题3 设$M: \Omega \to 2^X \backslash \{\varnothing\}$为具闭值的集值映射,$F: M \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$在$M(\mu)$上为具局部Lipschitz连续的闭集值映射,则对任何的点$(\mu, x) \in \Omega \times X$, 有$L(\mu, x)$为闭集.

证明 对任何的点$(\mu, x) \in \Omega \times X$, 及序列$\{y_n\} \subseteq L(\mu, x), y_n \to y_0$, 则点$y_0 \in M(\mu)$且$F(y_n) \leqslant_K^{mu} F(x)$, 据$F$在$M(\mu)$上为具局部Lipschitz连续的闭集值映射,结合命题1,得$F(y_0) \leqslant_K^{mu} F(x)$, 故点$y_0 \in L(\mu, x)$.

据Khushboo et al.(2019a)中的定理5.1,结合引理3和命题3可知

引理6 设$M \subseteq X$为非空紧子集,$F: M \to 2^Y \backslash \{\varnothing\}$为具局部Lipschitz连续的闭集值映射,则问题

(SVOP)存在最小解.

引理7　对任何的点$\mu \in \Omega$, $M(\mu) \subseteq X$为弧连通子集, $F: X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$在$M(\mu)$上为严格$mu$-拟连通的集值映射,点$x_0 \in S_{mu}(\mu)$, 则$L(\mu, x_0) = \{x_0\}$.

证明　据L的定义易见点$x_0 \in L(\mu, x_0)$. 假若存在点$x_1 \in L(\mu, x_0)$, 使得$x_1 \neq x_0$, 据F在$M(\mu)$上为严格mu-拟连通的,则存在连续映射$\varphi: [0,1] \to M$, 满足$\varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_0$, 使得对任何的$t \in (0,1)$, 有$F(\varphi(t)) \ll_K^{mu} F(x_0)$, 故点$x_0 \notin W_{mu}(\mu)$, 这与点$x_0 \in S_{mu}(\mu) \subseteq W_{mu}(\mu)$矛盾,所以$L(\mu, x_0) = \{x_0\}$.

2　问题(PSVOP)解集的稳定性

本部分旨在研究问题(PSVOP)解集稳定性的最优条件. 问题(PSVOP)解集稳定性通常是指当问题的目标函数、约束条件和可行域等随参数发生微小扰动时,其解集的变化程度是否可控. 稳定性分析的核心在于研究解集映射的上半连续性、下半连续性、收敛性及紧性等对扰动的敏感度. 现首先分析问题(PSVOP)的mu-最小解映射和弱mu-最小解映射的上半连续性和紧性. 设$M: \Omega \to 2^X \setminus \{\varnothing\}$, $F: X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$为非空集值映射,为研究问题(PSVOP)解集稳定性的叙述方便起见,给出以下基本假设:

(H1)设点$\mu_0 \in \Omega$, M在点μ_0处连续且$M(\mu_0)$为紧集;

(H2)设点$\mu_0 \in \Omega$, $M(\mu_0) \subseteq X$为弧连通子集;

(H3)设点$\mu_0 \in \Omega$, F在$M(\mu_0)$上为局部Lipschitz连续的;

(H4)设点$\mu_0 \in \Omega$, F在$M(\mu_0)$上为弱局部K-Lipschitz连续的;

(H5)设点$\mu_0 \in \Omega$, F在$M(\mu_0)$上具非空紧凸值;

(H6)设点$\mu_0 \in \Omega$, F在$M(\mu_0)$上具非空闭值;

(H7)设点$\mu_0 \in \Omega$, F在$M(\mu_0)$上为严格mu-拟连通的.

定理1　对问题(PSVOP)而言,如果假设条件(H1)、(H3)、(H4)和(H5)成立,则W_{mu}在点μ_0处上半连续且$W_{mu}(\mu_0)$为紧集.

证明　据注3和引理6知, $W_{mu}(\mu_0) \neq \varnothing$. 下证$W_{mu}$在点$\mu_0$处为上半连续的,假若不然,设$W_{mu}$在点$\mu_0$处不是上半连续的,则存在邻域$V \subseteq X$, 满足$W_{mu}(\mu_0) \subseteq V$, 以及序列$\{\mu_n\} \subseteq \Omega, \mu_n \to \mu_0$, 满足点$x_n \in W_{mu}(\mu_n)$, 使得对任何的$n \in \mathbb{N}$, 有

$$x_n \notin V. \tag{17}$$

据M在点μ_0处上半连续且$M(\mu_0)$为紧集,据引理5的(ii)知,存在点$x_0 \in M(\mu_0)$, $x_n \to x_0$(若有必要,选取$\{x_n\}$的子序列),则必有点$x_0 \in W_{mu}(\mu_0)$. 假若点$x_0 \notin W_{mu}(\mu_0)$, 则存在点$y_0 \in M(\mu_0)$, 使得$F(y_0) \ll_K^{mu} F(x_0)$. 由M在点μ_0处下半连续,据引理5的(i)知,存在序列$\{y_n\} \subseteq M(\mu_n)$, 使得$y_n \to y_0$. 由条件(H3)、(H4)和(H5),据命题2知,当n充分大时,有$F(y_n) \ll_K^{mu} F(x_n)$, 这与点$x_n \in W_{mu}(\mu_n)$矛盾,故点$x_0 \in W_{mu}(\mu_0)$. 由$x_n \to x_0$, 当n充分大时,有点$x_n \in V$, 这与式(17)矛盾,故W_{mu}在点μ_0处上半连续.

以下证$W_{mu}(\mu_0)$为紧集. 据$W_{mu}(\mu_0) \subseteq M(\mu_0)$, 以及$M(\mu_0)$为紧集,只证$W_{mu}(\mu_0)$为闭集. 设序列$\{w_n\} \subseteq W_{mu}(\mu_0), w_n \to w_0$, 假若点$w_0 \notin W_{mu}(\mu_0)$, 存在点$\bar{w} \in M(\mu_0)$, 满足$F(\bar{w}) \ll_K^{mu} F(w_0)$, 类似以上论证过程知,当$n$充分大时,有$F(\bar{w}) \ll_K^{mu} F(w_n)$, 这与序列$\{w_n\} \subseteq W_{mu}(\mu_0)$矛盾,故点$w_0 \in W_{mu}(\mu_0)$, 所以$W_{mu}(\mu_0)$为紧集.

现给出例1检验定理1的有效性.

例1　设$X = Y = \mathbf{R}^2, \Omega = [0,1], K = \mathbf{R}_+^2$. 集值映射$M: \Omega \to 2^X \setminus \{\varnothing\}$定义为对任何的点$\mu \in \Omega$, 有$M(\mu) = [0,\mu] \times [0,\mu]$, 集值映射$F: X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$定义为对任何的点$(x,y) \in \mathbf{R}^2$, 有$F(x,y) = (|xy|, |xy|) + B_Y$. 选取点$\mu_0 = 1 \in \Omega$, 易验证满足定理1的条件,经计算可知对任何的点$\mu \in \Omega$, 有$W_{mu}(\mu) = \{0\} \times [0,\mu] \cup [0,\mu] \times \{0\}$, 显然地$W_{mu}$在点$\mu_0 = 1$处上半连续且$W_{mu}(\mu_0) = \{0\} \times [0,1] \cup [0,1] \times \{0\}$为紧集.

定理2　对问题(PSVOP)而言,如果假设条件(H1)、(H3)、(H4)、(H5)和(H7)成立,则S_{mu}在点μ_0处上半连续且$S_{mu}(\mu_0)$为紧集.

证明　据引理6知, $S_{mu}(\mu_0) \neq \varnothing$. 下证$S_{mu}$在点$\mu_0$处为上半连续的,假若不然,设$S_{mu}$在点$\mu_0$处不是上半

连续的，则存在邻域 $V\subseteq X$，有 $S_{mu}(\mu_0)\subseteq V$，存在序列 $\{\mu_n\}\subseteq\Omega$，$\mu_n\to\mu_0$，使得

$$S_{mu}(\mu_n)\not\subseteq V. \tag{18}$$

由 F 在 $M(\mu_0)$ 上严格 mu-拟连通的，据引理4知，$S_{mu}(\mu_0)=W_{mu}(\mu_0)\subseteq V$. 由定理1知，$W_{mu}$ 在点 μ_0 处上半连续，故存在点 μ_0 的邻域 $U\subseteq X$，使得对任何的点 $\mu\in U$，有 $W_{mu}(\mu)\subseteq V$. 又 $\mu_n\to\mu_0$，当 n 充分大时，有点 $\mu_n\in U$，故 $S_{mu}(\mu_n)\subseteq W_{mu}(\mu_n)\subseteq V$，这与式(18)矛盾，故 S_{mu} 在点 μ_0 处上半连续. 又注意到 $S_{mu}(\mu_0)=W_{mu}(\mu_0)$，并结合定理1知，$S_{mu}(\mu_0)$ 为紧集.

为给出问题(PSVOP)的(弱)mu-最小解映射下半连续性，现指出 L 的上半连续性.

引理8 对问题(PSVOP)而言，如果假设条件(H1)、(H2)、(H3)、(H6)和(H7)成立，则 L 在 $\{\mu_0\}\times M(\mu_0)$ 上为上半连续的.

证明 假若存在点 $x_0\in M(\mu_0)$，使得 L 在点 (μ_0,x_0) 处不是上半连续的，则存在 $V\subseteq X$，满足 $L(\mu_0,x_0)\subseteq V$，及 $(\mu_n,x_n)\to(\mu_0,x_0)$，满足 $L(\mu_n,x_n)\not\subseteq V$，故存在点 $y_n\in L(\mu_n,x_n)$，使得对任何的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$y_n\notin V. \tag{19}$$

由 M 在点 μ_0 处上半连续且 $M(\mu_0)$ 为紧集，据引理5的(ii)知，存在点 $y_0\in M(\mu_0)$，$y_n\to y_0$(若有必要，取 $\{y_n\}$ 的子序列). 据点 $y_n\in L(\mu_n,x_n)$，知对任何 $(\mu_n,x_n)\in\Omega\times X$，有 $F(y_n)\leqslant_K^{mu}F(x_n)$. 据命题1知 $F(y_0)\leqslant_K^{mu}F(x_0)$，故点 $y_0\in L(\mu_0,x_0)$. 由 $y_n\to y_0$，当 n 充分大时，点 $y_n\in V$，这与式(19)矛盾，故 L 在 $\{\mu_0\}\times M(\mu_0)$ 上为上半连续的.

接下来建立问题(PSVOP)的 mu-最小解映射和弱 mu-最小解映射的下半连续性定理.

定理3 对问题(PSVOP)而言，如果假设条件(H1)、(H2)、(H3)、(H6)和(H7)成立，则 S_{mu} 在点 μ_0 处为下半连续的.

证明 据引理6知，$S_{mu}(\mu_0)\neq\varnothing$. 下证 S_{mu} 在点 μ_0 处为下半连续的，假若不然，设 S_{mu} 在点 μ_0 处不是下半连续的，则存在点 $y_0\in S_{mu}(\mu_0)$，以及零点的邻域 $V\subseteq X$，序列 $\{\mu_n\}\subseteq\Omega$，$\mu_n\to\mu_0$，使得对任何的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$(y_0+V)\cap S_{mu}(\mu_n)=\varnothing. \tag{20}$$

据点 $y_0\in S_{mu}(\mu_0)$，知点 $y_0\in M(\mu_0)$. 由 M 在点 μ_0 处下半连续，据引理5的(i)知，存在序列 $\{y_n\}\subseteq M(\mu_0)$，使得 $y_n\to y_0$. 据引理7知，$L(\mu_0,y_0)=\{y_0\}$，则 $L(\mu_0,y_0)\subseteq y_0+V$. 再结合引理8得，$L$ 在点 (μ_0,y_0) 处为上半连续的，故当 n 充分大时，有

$$L(\mu_n,y_n)\subseteq y_0+V. \tag{21}$$

由点 $y_n\in L(\mu_n,y_n)$，知 $L(\mu_n,y_n)\neq\varnothing$. 据命题3，得 $L(\mu_n,y_n)$ 为闭集. 又 $M(\mu_n)$ 为紧集及 $L(\mu_n,y_n)\subseteq M(\mu_n)$，则 $L(\mu_n,y_n)$ 为紧集. 再据引理6，可得 $S_{mu}(L(\mu_n,y_n))\neq\varnothing$，现取点 $w_n\in S_{mu}(L(\mu_n,y_n))$，并结合式(21)，当 n 充分大时，有

$$w_n\in S_{mu}(L(\mu_n,y_n))\subseteq L(\mu_n,y_n)\subseteq y_0+V. \tag{22}$$

又由注4可知，当 n 充分大时，有

$$w_n\in S_{mu}(L(\mu_n,y_n))\subseteq S_{mu}(\mu_n). \tag{23}$$

结合式(22)与式(23)，当 n 充分大时，有点 $w_n\in(y_0+V)\cap S_{mu}(\mu_n)$，这与式(20)矛盾，所以 S_{mu} 在点 μ_0 处下半连续.

定理4 对问题(PSVOP)而言，如果假设条件(H1)、(H2)、(H3)、(H6)和(H7)成立，则 W_{mu} 在点 μ_0 处为下半连续的.

证明 据注3和引理6知，$W_{mu}(\mu_0)\neq\varnothing$. 下证 W_{mu} 在点 μ_0 处为下半连续的. 据引理4知，$W_{mu}(\mu_0)=S_{mu}(\mu_0)$，对任何的点 $y_0\in W_{mu}(\mu_0)$，有点 $y_0\in S_{mu}(\mu_0)$. 再据定理3，知 S_{mu} 在点 μ_0 处是下半连续的，故对点 y_0 的任何邻域 $V\subseteq X$，存在点 μ_0 的邻域 $U\subseteq\Omega$，使得对任何的点 $\mu\in U$，有 $S_{mu}(\mu)\cap V\neq\varnothing$. 又由注3，知 $S_{mu}(\mu)\subseteq W_{mu}(\mu)$，则对任何的点 $\mu\in U$，有 $W_{mu}(\mu)\cap V\neq\varnothing$，所以 W_{mu} 在点 μ_0 处下半连续.

现举出例2说明定理4.

例2 设 $X=Y=\mathbf{R}^2$，$\Omega=[0,1]$，$K=\mathbf{R}^2_+$. 集值映射 $M:\Omega\to2^X\setminus\{\varnothing\}$ 定义为对任何的点 $\mu\in\Omega$，有 $M(\mu)=[0,1]\times[0,1]$，且集值映射 $F:X\to2^Y\setminus\{\varnothing\}$ 定义为对任何的点 $(x,y)\in M(\mu)$，有 $F(x,y)=([x,1+x]\times$

$[x, 1+x], [y, 1+y] \times [y, 1+y]) + B_Y$. 选取点 $\mu_0 = 0 \in \Omega$, 易验证满足定理4的条件,经计算知对任何的点 $\mu \in \Omega$, 有 $W_{mu}(\mu) = [0, 2] \times [0, 2]$, 显然地 W_{mu} 在点 $\mu_0 = 0$ 处下半连续.

注5　(i)据引理3知,定理1和定理4拓宽了 Crespi et al.(2018)、Han et al.(2020)与孟旭东(2022b,2024)中研究集合的范围;

(ii)定理3和定理4中的目标集值映射具非空闭值比 Crespi et al.(2018)、Han et al.(2020)、Ansari et al.(2022)与孟旭东(2022b,2024)中目标集值映射具非空紧值条件更弱,且定理3和定理4中条件(H2)中所蕴含的弧连通集比 Crespi et al.(2018)、Han et al.(2020)、Ansari et al.(2022)与孟旭东(2022b,2024)中给出的凸集更弱;

(iii)据注2知,定理1-定理4中的目标集值映射的局部 Lipschitz 连续性与 Crespi et al.(2018)、Han et al.(2020)与孟旭东(2022b)中研究的目标集值映射的半连续性不同.

据定理1-定理4得问题(PSVOP)的(弱)*mu*-最小解映射连续性和紧性最优性结论.

定理5　对问题(PSVOP)而言,如果假设条件(H1)、(H2)、(H3)、(H4)、(H5)、(H6)和(H7)成立,则

(i) S_{mu} 在点 μ_0 处连续且 $S_{mu}(\mu_0)$ 为紧集;

(ii) W_{mu} 在点 μ_0 处连续且 $W_{mu}(\mu_0)$ 为紧集.

注6　由定理5知,问题(PSVOP)的两类解映射的连续性和紧性具有统一性最优条件.

现给出例3以解释定理5.

例3　设 $X = Y = \mathbf{R}^2, \Omega = [0, 1], K = \mathbf{R}^2_+$. 集值映射 $M: \Omega \to 2^X \setminus \{\varnothing\}$ 定义为对任何的点 $\mu \in \Omega$, 有 $M(\mu) = [0, \mu] \times [0, \mu]$, 集值映射 $F: X \to 2^Y \setminus \{\varnothing\}$ 定义为对任何的点 $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, 有 $F(x, y) = (x+y, x-y) + B_Y$. 选取点 $\mu_0 = 1 \in \Omega$, 易验证满足定理5的条件,经计算对任何的点 $\mu \in \Omega$, 有 $S_{mu}(\mu) = W_{mu}(\mu) = \{(0, 0)\}$, 显然地 S_{mu}, W_{mu} 在点 $\mu_0 = 1$ 处连续且 $S_{mu}(1) = W_{mu}(1) = \{(0, 0)\}$ 为紧集.

3　结　语

(i) 本文在 Karaman et al.(2018)提出的基于 Minkowski 差的集合偏序关系下,在赋范线性空间中建立了约束集值映射受参数扰动下问题(PSVOP)的解集稳定性定理. 研究结果表明,问题(PSVOP)的 *mu*-最小解映射和弱 *mu*-最小解映射的连续性和解集的紧性具有一致相同的最优性条件,且给出的基本条件弱于 Crespi et al.(2018)、Han et al.(2020)、Ansari et al.(2022)与孟旭东(2022b,2024) 中相关定理的假设.

(ii) 本文获得问题(PSVOP)的解集稳定性结果为进一步研究问题(PSVOP)的 Painlevé-kuratowski 收敛性、适定性和连通性等奠定了理论基础和提供了思路借鉴,并助力推动了集值优化理论在运筹控制、数字经济、交通均衡及医疗保障等众多领域的应用给出理论支撑.

参考文献:

孟旭东, 2022a. 含参集值向量拟均衡问题和对偶问题解 Lipschitz 连续性[J]. 大连理工大学学报, 62(3): 321-330.

孟旭东, 2022b. 含参集值优化问题近似解集的稳定性[J]. 云南大学学报(自然科学版), 44(4): 663-674.

孟旭东, 2022c. 集合优化问题解集的稳定性和扩展适定性[J]. 山东大学学报(理学版), 57 (2): 98-110.

孟旭东, 2022d. 基于改进集的参数集值优化问题解集映射的稳定性[J]. 中山大学学报(自然科学版)(中英文), 61(2): 180-188.

孟旭东, 2024. 集优化问题的适定性和稳定性[J]. 云南大学学报(自然科学版), 46(5): 801-810.

孟旭东, 2025. 具改进集的集值优化问题的稳定性[J/OL]. 运筹学学报(中英文), [2025-01-14]. https://link.cnki.net/urlid/31.1732.O1.20250114.1055.010.

孟旭东, 万德龙, 2019. 含参集值向量均衡问题近似解映射的 Lipschitz 连续性[J]. 大连理工大学学报, 59(4): 434-440.

ANH L Q, DUY T Q, HIEN D V, et al, 2020. Convergence of solution to set optimization problems with the set less order relation [J]. J Optim Theory Appl, 185(2): 416-432.

ANSARI Q H, HUSSAIN N, SHARMA P K, 2022. Convergence of the solution sets for set optimization problems[J]. J Nonlinear Var Anal, 6(3): 165-183.

AVRIEL M，DIEWERT W E，SCHAIBLE S，et al，1988. Generalized concavity[M]. New York：Plenum Press.

CHICCO M，MIGNANEGO F，PUSILLO L，et al，2011. Vector optimization problems via improvement sets [J]. J Optim Theory Appl，150(3)：516-529.

CRESPI G P，DHINGRA M，LALITHA C S，2018. Pointwise and global well-posedness in set optimization：A direct approach [J]. Ann Oper Res，269(1/2)：149-166.

DHINGRA M，LALITHA C S，2017. Set optimization using improvement sets[J]. Yugosl J Oper Res，27(2)：153-167.

GÖPFERT A，RIAHI H，TAMMER C，et al，2003. Variational methods in partially ordered spaces[M]. Berlin：Springer.

HAN Y，2022. Painlevé-Kuratowski convergences of the solution sets for set optimization problems with cone-quasiconnectedness [J]. Optimization，71(7)：2185-2208.

HAN Y，ZHANG K，HUANG N J，2020. The stability and extended well-posedness of the solution sets for set optimization problems via the Painlevé-Kuratowski convergence[J]. Math Method Oper Res，91(1)：175-196.

JAHN J，HA TXD，2011. New order relations in set optimization[J]. J Optim Theory Appl，148(2)：209-236.

KARAMAN E，SOYERTEM M，TOZKAN D，et al，2018. Partial order relations on family of sets and scalarizations for set optimization[J]. Positivity，22(3)：783-802.

KHAN A A，TAMMER C，ZĂLINESCU C，2015. Set-valued optimization[M]. Heidelberg：Springer.

KHOSHKHABAR-AMIRANLOO S，2018. Stability of minimal solutions to parametric set optimization problems[J]. Anal Appl，97(14)：2510-2522.

KHUSHBOO，LALITHA C S，2019a. A unified minimal solution in set optimization[J]. J Global Optim，74(1)：195-211.

KHUSHBOO，LALITHA C S，2019b. Scalarizations for a set optimization problem using generalized oriented distance function [J]. Positivity，23(5)：1195-1213.

KUROIWA D，1997. Some criteria in set-valued optimization(nonlinear analysis and convex analysis)[J]. 数理解析研究所講究録，985：171-176.

MAO J Y，WANG S H，HAN Y，2019. The stability of the solution sets for set optimization problems via improvement sets[J]. Optimization，68(11)：2171-2193.

PALLASCHKE D，URBAŃSKI R，2002. Pairs of compact convex sets：Fractional arithmetic with convex sets[M]. Dordrecht：Kluwer Academic.

PENG Z Y，CHEN X J，YAO J C，et al，2025. On the stability for parametric set optimization problems via improvement sets without the strict convexity[J]. J Nonlinear Var Anal，9(5)：637-654.

PENG Z Y，CHEN X J，ZHAO Y B，et al，2023. Painlevé-Kuratowski convergence of minimal solutions for set-valued optimization problems via improvement sets[J]. J Global Optim，87：759-781.

PREECHASILP P，WANGKEEREE R，2019. A note on semicontinuity of the solution mapping for parametric set optimization problems[J]. Optim Lett，13(5)：1085-1094.

XU D Y，LI S J，2016. On the solution continuity of parametric set optimization problems[J]. Math Method Oper Res，84(1)：223-237.

ZHANG C L，HUANG N J，2021. Well-posedness and stability in set optimization with applications[J]. Positivity，25(3)：1153-1173.

（责任编辑 冯兆永）